Chapitre 11 : Calcul matriciel et systèmes linéaires

Produit matriciel

Exercice 1: Effectuer les produits matriciels suivants :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $AX = XA$.
   Montrer que A est une matrice scalaire.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $(AX)^2 = 0$.
   Montrer que $A = 0$.

Indication pour les deux questions : utiliser des matrices élémentaires.

Matrices carrées

Exercice 3:

1. Montrer que toute matrice carrée peut se décomposer de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
2. Soient deux matrices symétriques. Montrer que leur produit est symétrique si et seulement si les deux matrices commutent.
3. Montrer que, lorsqu'il existe, l'inverse d'une matrice antisymétrique est antisymétrique.

Exercice 4: Calculer, pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$, la puissance n-ième de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ;\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ;\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5: Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère les matrices suivantes de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

1. Calculer J^n pour tout entier naturel n.
2. Montrer que la matrice $I_4 - J$ est inversible. Déterminer son inverse.
3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M(a,b)^n$.

Exercice 6: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$.
   Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $(A + I_n)^p$ comme une combinaison linéaire de A et I_n.
2. Déterminer les puissances successives de $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

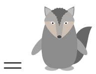
Exercice 7: Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, et on note

$$\mathcal{C} = \{M(a,b) \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

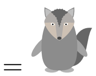
1. Montrer que $\mathcal{C}$ est stable par produit, et donner une formule pour le produit $M(a,b)M(c,d)$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $M(a,b)M(a,b)^T$. En déduire que $M(a,b)$ est inversible si et seulement si $(a,b) \neq (0,0)$, et calculer alors son inverse.
3. On pose
   $$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \to & \mathbb{C} \\ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} & \mapsto & a + ib \end{array}.$$
   Montrer que $\varphi(MN) = \varphi(M)\varphi(N)$ et que $\varphi(M^T) = \overline{\varphi(M)}$ pour tout $M, N \in \mathcal{C}$.

Systèmes linéaires et opérations élémentaires

Exercice 8:

 = 

 = 

 = 

 = 8 kg

Quels sont les poids de , , ,  ?

Exercice 9: Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ 2x - y + 3z + t = 3 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases}$$

Exercice 10: Soit $a \in \mathbb{R}$. On étudie le système suivant :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ x + 3y - 2z = 7 \\ 2x - 2y + a^2 z = a+4 \end{cases}$$

1. En fonction du paramètre a, déterminer si ce système admet aucune, une ou plusieurs solutions.
2. Résoudre ce système.

Exercice 11: Équilibrer l'équation chimique suivante $aC_8H_{18} + bO_2 = cH_2O + dCO_2$.

Exercice 12: Montrer que les matrices suivantes sont inversibles, et calculer leurs inverses :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 13: Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Exercice 14: Des nombres sur des briques ont été effacés. Le nombre inscrit sur chaque brique est égal à la somme des nombres inscrits sur les deux briques situées juste en dessous. Retrouver les nombres effacés sur les briques formant la base.